

| | |
|-------------|---|
| Title | 秩序：乱雑遷移の素過程 (遷移過程と乱流の理論) |
| Author(s) | 佐藤, 浩 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1981), 435: 115-133 |
| Issue Date | 1981-08 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/102739 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

秩序—乱雑遷移の素過程

東大 宇宙研 佐藤 浩

1. はしがき

秩序状態と乱雑状態とが互いにうつり変る遷移の現象は私達のまわりのいろんなところで見ることできます。このことはまた必然と偶然という基本的な問題に関係するわけですが、流体力学の中で得られている遷移についての豊富な知見をほかの分野に応用することはできないかということ、またいろいろな遷移現象について、できるだけ一般性のある素過程を見つけることはできないかということを考えてみた結果について述べたいと思います。

2. 混沌と秩序と空

乱雑状態を表現するのに混沌(chaos)という言葉が使われ

ます。極限として完全に雑然としていて、十分に豊富な内容を持つ混沌界 $R\infty$ を考えましょう。ここでは雑然度 $\alpha=1$ 、整然度 $\beta=0$ となります。この $R\infty$ は次元が無限大で宇宙に存在するあらゆる乱雑なものを含む世界です。次元が N のとき $R\infty$ を $R\in N$ とあらわします。この $R\in N$ に対して、
 ‘要請’ YA が作用すると、部分混沌界 RAN が作られます。即ち、

$$YA \cdot R\in N = RAN \dots\dots\dots (1)$$

となります。この要請 YA と次元 N で特徴付けられる RAN が我々が実際に目にすることのできる乱雑系です。その例として、

| | YA | N |
|--------|--|-----|
| ざいころ : | 目が 1 ~ 6 | 1 |
| 乱 流 : | $\left\{ \begin{array}{l} \text{連続の式} \\ \text{運動方程式} \end{array} \right.$ | 4 |
| 雑 音 : | 時系列信号 | 1 |

のようなものがあります。この混沌界で重要な役割を演じるのは ‘かくし絵の定理’ です。これは
 ‘混沌界の中から任意の形象(pattern)を引き出すことができる’

というものです。混沌界には無限の可能性があると言い換えてもよいでしょう。実際に現われる RAN については YA と

いう要請がありますからそれを見逃さない形象を引出すことはできません。この定理はしばしばもっと实际的に表現されます。例えば猿がめちゃくちゃにタイプライターを叩いているといつかは一冊の聖書を仕上げるだろうとか、557の仮名文字の組合せの中にはどのような秀句も含まれているというものです。

次に秩序界(cosmos)について考えましょう。 $RZ\alpha$ に対して完全に整然としていて十分に豊富な内容を持つ秩序界を $SZ\alpha$ とします。ここでは $\alpha=1$, $\beta=0$ で、この世界には考えうるあらゆる形象が入っています。 N 次元の SZN に対しては作用する‘制限’TAによって

$$TA \cdot SZN = SAN \dots\dots\dots (2)$$

という部分秩序界が作られます。そしてこれが我々が実際に目に見るものです。その例としては

| | | |
|-------|------------|-----|
| | TA | N |
| 幾何模様 | : 円、直線 | 2 |
| 五十音表 | : あいうえお... | 2 |
| 軍隊の行進 | : 兵隊 | 4 |

などがあります。この秩序界で重要なのは‘みにくいあひるの子の定理’です。これは

‘すべての二つの物件は同じ度合いの類似性を持つ。’

とあらわされます。この定理はいわゆる類似性という概念

を完全に否定し、認識と価値判断とは分ち難いものであることを主張します。

以上の二つの世界のほかにもうひとつ、空界(void)を考える必要があります。これはなここに入るとすべてが消滅し、その中は完全に無の状態にある世界です。例えばコーヒ茶碗の中をスプーンでかきまわして乱流を作ったとして、それをそのまま放っておくといっや、流れは全く無くなります。これを運動エネルギーが空界へ流出したと表現します。

このように考えられた三つの世界は佛教で言う‘三界’と非常によく対応しています。三界とはおとと一切衆生が生死輪廻する世界とされていますが次のような表を作ることができます。

空界
(void)

秩序界
(cosmos)

混沌界
(chaos)

無色界

(物質、肉体を離脱した
世界)

色界

(物質的なものはすべて
殊妙、精妙)

欲界

(色欲、食欲の強い有情
の住む世界)

これらの三界はまたいくつかの天や地獄に分類されていることも我々のいわゆる部分界に対応していると申せましょう。

このような三つの世界の中の存在としては次の三つの要素があります。

(1) 具体

これは実際に目に見え耳にきこえ、世界の中を動くものであって、石や水のような物体や動物、人間、さらには波のような現象をも含んでよいでしょう。その意味では、何れの物質よりも広いものです。

(2) 活力

エネルギーをさらに一般化したもので普通のエネルギーはもとより、生命力、気力、志気、財力、愛情というような活動の源泉となるもの、活動の活発さをあらわします。

(3) 情報

世界の中で情報が重要なことはい言うまでもありません。

思考とか認識という精神活動もここでは情報にします。物理学の理論や数学なども情報の操作に他ならないからです。

さきの三つの世界のうち空界は別として、あとの二つの世界ではこれらの三つの量が複雑にからみ合って秩序立った、または乱雑な世界を構成しているのです。

3. 遷移についての一般的な議論

オノ表^念遷移の例を五つ挙げました。まず音楽について考えてみましょう。美しい音楽が具合の悪い伝わり方のために、雑音という乱雑なものに変わるという遷移。また逆に雑音の中からよい音を拾い出してきて快いメロディーを作り上げるという遷移があります。それにはシンセサイザーという器械が使われます。泰平と戦乱の間の遷移については説明はいりません。生体というものは身体のいろいろな部分が秩序立ってはいらしている限りは健康なのですが、肝臓の機能が低下したり、作るべきでない細胞をどんどん作るようながんが発生したりすると乱雑化して病気になるなり、遂には死という終末を迎えることになります。勿論、適切な手当と生体に備わっている回復力によっておとの健康を取り戻すことができます。会社というものは秩序のある組織体ですが経営の失敗などのためにその秩序を失って倒産、解散という憂目を見ることもあります。個人としても経済活動はできるのですが、それよりも会社を作る方が利益が大きいという理由のために沢山の人が集って会社を設立することになります。流体の運動については層流から乱流への遷移、あるいはその逆が有名です

才1表 遷移現象の例

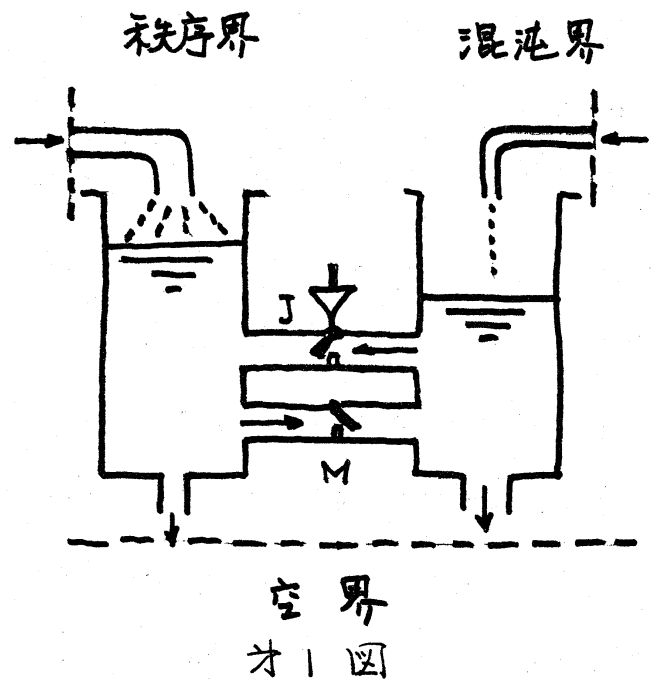
| | 秩序界 | | 混沌界 |
|------|-----|--|-----|
| [流体] | 渦・波 | $\xrightarrow{\text{乱雑化}}$ $\xleftarrow{\text{秩序化}}$ | 乱流 |
| [芸術] | 音楽 | $\xrightarrow{\text{劣化}}$ $\xleftarrow{\text{シンセサイザー}}$ | 雑音 |
| [政治] | 泰平 | $\xrightarrow{\text{叛乱}}$ $\xleftarrow{\text{統一}}$ | 戦乱 |
| [生体] | 健康 | $\xrightarrow{\text{変調}}$ $\xleftarrow{\text{回復}}$ | 疾病 |
| [経済] | 会社 | $\xrightarrow{\text{倒産}}$ $\xleftarrow{\text{設立}}$ | 個人 |

が、この現象はほかの四つの場合に比べてみると適切でないことが分ります。たとえばコーヒー茶碗の中の乱流エネルギーは混沌界から空界に流れ出たのであって、秩序界に移ったのではありません。乱流が層流に変わるというのは、ちょうどスイッチを切ったら雑音がきこえなくなっただけというたぐいの変わり方ではない四つの場合とはちがいます。規則正しい波や渦が崩れて乱流になることはよく知られています。これは本物の遷移です。しかしこの逆過程として乱流が秩序立ったものになるという現象はほとんどありません。強いて言えば

乱流から音が出るということがありますが、これはほかの四つの例と比べるとひどく見劣りがします。もうひとつは気体の乱れた流れであった原始太陽系から今のような太陽や惑星が作られたということや、‘くらげがすたぶよえる’国を天のぬぼこで包みまわして引き上げたら島ができたという話がありますが、これらは相変じを含んでいすから単純な遷移とは言えません。この点で流体運動の遷移現象は不完全なものなのです。流体をほかの手段にしようというくらみはうまくゆかぬ予感があります。

このような遷移の現象はいずれも固性的であり、複雑な構造を持っていますが共通の特徴は秩序ができたりにくくなったことです。こ

の点に目をつけて
何か共通で、基本的な素過程をみつけ出すことはできないでしょうか。
遷移過程をポンチ絵にしてみるとオノ図ができます。
左を秩序界、



右を混沌界、下を空界とします。実際にはこの三つの世界は別々にあるのではなくて、同じ空間がどれかになる、あるいはある空間にはこの三つの世界が重なっているはずですが、分かりやすくするためにこのように画いておきます。ここにたまっている水は活力や情報とします。水の多いところはその状態が強いと覚えて下さい。まず秩序界へは外から太いパイプで水が流れ込みます。混沌界への供給は細くとしています。このことは例えば会社を維持し、発展させようとする力は大きく、遂に会社を解散させようとする力は小さいことに相当します。秩序界の水は下の右開き弁(M)を通過して混沌界へ流れます。これは経営の失敗、会社の崩壊の可能性はいつもあるという意味です。会社の活力は直接消費されることもあります。即ち水は空界へ流れ出ます。また個人ばりの混沌界では、収入に比べて消耗が激しく、太いパイプで空界へ出て行きます。ところで個人が会社を作ることは人為的で、ほうっておいたのではありません。即ち上側の左開き弁(J)は外からひねってやる必要があります。混沌界の水位の方が高くまたこの弁を開く力が働くとはじめて右から左へ水が流れます。この左右の方向の非対称性はエントロピーの増減と似ています。すなわちある系のエントロピーはほうっておくと増えよう、増えようとするのでそれを減らすためには何か

の手段をとる必要があります。それと同様に、水はいつも混沌界へと流れようとするのです。政治体制にしても、ほうっておけば乱雑になるうになるうとしますから秩序を保つためには監視が必要ですし、病気にいひとりてにけりしますがそれを治すのには医者の力を借りる必要があるといった調子です。これを説明するためにはエントロピーの概念をもっと拡張して議論をすることもできますがそれでは物理や情報の世界に混乱を招くことになりまのでこゝでは乱雑化優勢の原理とも呼んでおきましょう。

流体の乱れでもこの原理が圧倒的に働きますので秩序化がむずかしいという風に解釈できます。

次には遷移を数式であらわすことを試みましょう。まず乱雑化です。これは M という作用子のいふたきだと考えます。 M にはいろいろな種類がありますので MX でその中のひとつを表わして、 $MX \cdot SAZ = \alpha SAZ + \beta RAZ \dots\dots (3)$ という関係を作ります。これは SAZ という秩序状態に MX が作用して秩序 αSAZ と乱雑 βRAZ を作ることを意味します。また RAZ に作用すると

$$MX \cdot RAZ = RAZ \dots\dots\dots (4)$$

で、 RAZ の方には変化がありません。この二つの式から一般に整然度 α_0 、雑然度 β_0 の系に対する作用は、

$$MX [x_0 SAZ + z_0 RAZ] \\ = x_0 x SAZ + (x_0 z + z_0) RAZ \dots (5)$$

とたなり RAZ の方が $x_0 z$ だけふえる即ち乱雑化がおきるわけです。 x や z の最大値は 1 であると考えると SAZ の方だけ x に減っています。このような MX は健康に対する病原菌音楽に対する雑音を含む伝送路、泰平に対する叛乱者などの列があります。

次は秩序化です。これには JX という作用子を考えます。この性質は

$$JX \cdot RAZ = p SXZ + q RAZ \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} JX \cdot SAZ &= r SXZ & X \neq A \\ &= SAZ & X = A \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

で表わされます。(6) 式の p は発掘係数で、かくし絵の定理によるとどのような形勢でも見出される筈ですから $p \neq 0$ です。そして条件 X がきびしいほど p は小さくなります。(7) 式の r は類似係数で、SAZ に JX を作用するのは SAZ から条件 X に適するものをえらぶことにたなり、みにくいあひるの子の定理によるとどのような物件も同じくらい入っていますから r は普遍常数ということになります。ではこのような JX はどこにあるのでしょうか。まず絵の具をでたらめに投げつけた中から馬や魚の形を見付けることはむづかしくあり

ません。それはもとがでたらめであればあるほどやさしいのです。これは情報だけの列ですが、大乱の天下を平定したり大病を治したりという場合にはそれを成しとげようという個人なり集団なりの意志と、それを可能にする情報や活力の組み合わせがJXということになるでしょう。

もし乱雑さの中やらどんな形象でも見出すことのできるのなら、本当の意味での形象の存在ということとはどんなことになるのでしょうか。そこで存在度というものを考えることにします。一般の場合にJXを作用させてみますと

$$JX [x_0 SAZ + z_0 RAZ]$$

$$= (r_0 x_0 + p z_0) SXZ + g z_0 RAZ \dots (8)$$

となります。 $g < 1$ ですから RAZ の方は減って SXZ の方はふえてたしやに秩序化になっています。ここで $x_0 = 0$ 即ち最初には秩序が全く無いときにも $p z_0$ だけの秩序があらわれませんが、これは本当の意味での存在ではありません。存在度 n として

$$n = \log \left(\frac{r_0 x_0 + p z_0}{p z_0} \right)$$

$$= \log \left(1 + \frac{r_0 x_0}{p z_0} \right) \dots \dots \dots (9)$$

と書いてみますと $x_0 = 0$ のときには $n = 0$ となって具合がよく $n > 0$ のときにこそはじめて本当の意味で存在している

と言うことができます。

4. 秩序 — 混沌遷移

この遷移については二つの条件を考えることができます。それは外因条件と内部原因です。この遷移はこの両方によっておきるわけですが、それは表2に示されています。まず、流体力学の遷移は外因条件として平均流、内部原因としてスペクトル成分の間の干渉によって促進されます。また生体について考えてみますと寒さという外因条件で風邪を引きますし、一方では加齢(年をとること)によっていろいろな病気が出やすくなります。会社にしても景気が悪いという外因条件があればつぶれますし、内部で経営の失敗があればこれも倒産の原因になります。これらはさきのMXの内容ですが、この遷移過程はまた次の四つの段階を経ておきるといえましょう。

まず最初は整然部分の変形段階です。これは国際情勢の変化に対応するために政治機構を改善するといった乱雑化を避けるための整然部分の変化です。不景気が続くと従業員を減らすというのは会社のとる手段です。流体については、波や渦の成長、減衰という段階です。この段階では乱雑度は、

表2 秩序 — 混沌遷移

| | | | | |
|----------------------------|---|------|------|----|
| 表. <u>秩序</u> — <u>混沌遷移</u> | | 外部条件 | 内部原因 | |
| 渦・波 | → | 乱流 | 平均流 | 干渉 |
| 音楽 | → | 雑音 | 伝送系 | 混合 |
| 泰平 | → | 戦乱 | 外敵 | 蜂起 |
| 健康 | → | 疾病 | 環境 | 加齢 |
| 会社 | → | 個人 | 景気 | 失敗 |

$\alpha = 0$ でまだまだ秩序が保たれています。あとで考えるとこの段階は乱雑化の前駆期に当たっています。

次は乱雑化の線型段階です。ここでは $\alpha = 0 \sim 0.1$ の程度です。すでに乱雑化がはじまっています。しかしまだ整然部分の‘傷’は小さく乱雑部分によって強い影響を受けることはありません。このとき外部条件は整然部分に影響を与えています。例えば不景気で会社のある部が成績不振でとりつづしに付ったとか、寒さにあたって風邪を引いて熱を出したといったところです。もちろん内部原因も重要で、政治機構の一部が頹廢して正常な機能を果たさないとか、経営陣の内輪もめで対立が激しくなるという例もあります。しかし秩序を維持しようという力は強く、さきの乱雑化優勢の原理に対抗していますから、 α は増減をくりかえします。よほどのことがなければ α が単調に増大するということはありません。

オ三段階は雑然化の非線形段階で、雑然化の最盛期といえましょう。この段階に達すると逆戻りの可能性は少なくなり、ますます。というのは秩序を守ろうという意欲が急激に減少するからです。病気になる人が健康を取り戻そうという気力を失ったり、会社の社長がもう駄目だと観念してしまったりすると、雪だるまが坂をころが落ちるように乱雑化へ向けて一直線につきすすみます。雑然部分の成長は主として整然部分からの情報やエネルギーの流入率によってまゝります。この率をきめる機構は個々の事柄によってちがっていますが、一般的に言えることは整然部分と雑然部分との強い干渉に依っているということで、これを非線型という名前をつけた理由なのです。そしてこの雑然化の過程にはいくつかの形象を見出すことができます。秩序界の形象が多く静的であるのに対して雑然化過程の形象は動的なのが特徴です。

雑然化の最終期が完成段階です。ここで $\beta = 1$, $\alpha = 0$ となります。しかしこれは理想的な状態で生物が死んだり、会社が解散するというはっきりした場合を除くと乱雑の中にも何か整然部分が残っていることが多いのです。流体でも乱雑の中に秩序運動が見出されていて、戦国時代でもいくらか組織が存在しています。

5. 混沌——秩序遷移

この遷移は乱雑化優勢の原理にさからっておきるのですから秩序を作るはっきりした原因なり強い志向なりがなければなりません。表3はそのような志向条件と内部原因をあらわしています。例えば戦国時代に天下を統一するのは権力を手に入れたいという強い願望があり、また敵と戦ってこれを

表3

| <u>混沌 —— 秩序遷移</u> | | 志向条件 | 内部原因 |
|-------------------|---|------|------|
| 乱流 | → | 渦・波 | |
| 雑音 | → | 音楽 | 美的感覚 |
| 戦乱 | → | 泰平 | 権力 |
| 疾病 | → | 健康 | 適応 |
| 個人 | → | 会社 | 利益 |
| | | | 協力 |

倒すことが成功の条件となります。死んだ人を生き返らせることはできませんが、医者からも見放された病人が健康をとり戻すのは生きていという強い意志と驚くほどの新生能力によるものでしょう。個人が会社を作ろうというのはいうまでもなくより多くの利益を獲得するためです。音楽家が雑音の中から音楽を作るにはむしろ美的感覚に頼っており、手

法としてはある部分を強調し、ほかの部分を抑えるという形をとります。流体の乱れではこの遷移はおきにくいのですが、たゞひとつの可能性として乱雑な乱れがある形象を持った秩序運動に変わるということがあります。しかし今までにわかったところではどうもこれは逆のようで、秩序運動から乱雑運動が作られているように思われます。恐らく乱流の乱雑——秩序遷移は音楽の場合と同じように人工的な取捨選択の手法によらなければ実現しないでしょう。

この遷移の過程は三つの段階に分けて考えることができます。最初は雑然度低減段階です。それは雑然度が大きすぎるために不都合があることを感じて、部分的にでもそれを小さくしようという動きがはじまることです。このときにはまだ秩序を作りあげるはっきりした目標はありません。戦国時代にもう戦争は沢山だ、戦争さえすれば税金ぐらい納めてもよいという気持ちが生まれると雑然度は下り始めます。また商売をするのにまだはっきりとした契約にはなっていないが何人かの人達と協力を始めるといふのもそのひとつの例です。

次には秩序化の目標をしっかりと定めてそれらに進もうという目標確定段階があります。別の言葉で言うと計画された秩序化です。戦国時代には何となく近隣と戦っているのですが

く、天下統一した時にはこのような帝国を作るという青手真に倣って戦いを進めていく段階であり、会社の設立準備の工事であり、病気を治すための手術・投薬などの計画に従ってこれを実行する段階です。この秩序化も一進一退し、時には完全に失敗することもありかもしれません。しばしば計画を狂わすような乱雑さが出現するやらです。

才三の段階は秩序化がほとんど完成して残った雑然性を排除する段階です。‘倭鬼死して走狗烹らる’というのが象徴的で、戦国時代には頼もし、勇将も新らしい統一国家にとって邪魔物になるというわけです。会社では社屋ができ、定款がきまります。そして社長以下の経営メンバーが実権を握ります。病院では手術のあとで糸を抜き、すくすく退院して自宅に落ち着きます。こゝまでくるともう乱雑化の心配はありません。困難な才二段階を無事に乗り越えたことを祝福する声ばかりです。このような三段階についても本当はもっと立入って考えてみる必要があります。我々の‘理論’はやっとはじまっています。

6. むすび

最初の目標であった済の本カ学の成果をいまの遷移過程に示

用するといふ企ては成功しませんでした。というのは流の奔の方では秩序化という遷移がはっきりした形ではおきていないからです。むしろほやの場合に典型的な遷移過程を見出すことができました。しかし考えを進めていくと、いくつもの新しい概念が作られましたし、遷移の一般論については大きな網を打つことはできたように思います。これからもっと考えを詰めて議論を精密なものにしなければなりません。

以上